計畫編號：2N2005

北二區區域教學資源中心計畫
夏季學院通識教育課程

課程計畫書

學校名稱	國立臺灣大學		
課程中文名稱	古代天文學中的幾何方法		
課程英文名稱	Geometric Method in Ancient Astronomy		
授課教師姓名	張海潮	單位/系所	數學系

申請日期：101 年 3 月 27 日

第一部份、課程規劃

開課學校	國立臺灣大學
中英文課程名稱	古代天文學中的幾何方法 Geometric Method in Ancient Astronomy
課程領域	量化分析與數學素養領域
預估修課人數	本校學生__20__人 + 非課程開設學校學生__30__人 ＝ __50__人
學分數	__2__學分 （每學分上課時數（含考試）至少應滿 18 小時）
上課起迄日	__101__年__7__月__5__日至__101__年__8__月__14__日(101/7/4 至 7/10，任選一日開課)
上課總週數	上課共__6__週， 是否連續每週排課？ ■是，上課時間連續數週不中斷 □否，中間中斷_____週
每週上課時間及時數	每週__二__ __14：20__～__17：20__ 每週__四__ __14：20__～__17：20__ 每週____ ____：____～____：____ 每週上課時數共計__6__小時 例： 每週一 10：00～12：00 每週三 13：30～15：30 每週五 10：00～12：00 每週上課時數共計______小時
上課地點	______國立臺灣______大學______校總區______
上課教室	未定
課程目標	本課程為本校量化分析與數學素養領域通識課程，教學設計乃由學生國中的數學學習經驗出發，探究古代天文學的幾何方法，藉以引導學生瞭解數學的思考方法，並培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構完美的特質。課程目標為： 一、介紹天文學之發端與數學物理起源之關聯 二、介紹古代天文學中發展之幾何方法，如球面幾何、平面幾何、三角學 三、介紹克卜勒三大行星律與牛頓據以導出之萬有引力。

	次別	上課日期/時間	課程內容
教學內容 及進度 （如課程邀請學者專家演講，請敘明其姓名、單位、職稱及演講主題） （如安排與課程內容相關之校內外教學活動，請敘明活動之性質、合作機構名稱、時間之規劃、場地之妥適性及課程進行之安全措施等）	1	101/07/05 (四) 14：20-17：20	1.課程介紹：從國中數學學習經驗談起 2.中國古代幾何
	2	101/07/10 (二) 14：20-17：20	周髀：中國古代測天觀影的方法
	3	101/07/12 (四) 14：20-17：20	月地距離的估計
	4	101/07/17 (二) 14：20-17：20	地平坐標系
	5	101/07/19 (四) 14：20-17：20	日晷
	6	101/07/24 (二) 14：20-17：20	晝夜長短與球面幾何
	7	101/07/26 (四) 14：20-17：20	時鐘問題
	8	101/07/31 (二) 14：20-17：20	克卜勒量天術
	9	101/08/02 (四) 14：20-17：20	曲率、曲率半徑、速度與法線加速度
	10	101/08/07 (二) 14：20-17：20	牛頓以幾何解釋面積律
	11	101/08/09 (四) 14：20-17：20	橢圓的曲率(半徑)公式
	12	101/08/14 (二) 14：20-17：20	克卜勒的行星繞日三大定律及萬有引力
教學助理規劃	請勾選教學助理類型，並預估需求人數： □申請帶討論課教學助理，預估 TA ＿＿＿＿＿＿人 ■申請不帶討論課教學助理，預估 TA ＿＿1＿＿人 請說明運用教學助理之規劃： (1) 協助課程場地與教材準備 (2) 提供學生課程內容的諮詢服務 (3) 協助作業批改與成績計算 (4) 協助維護課程網頁		
指定用書	本課程主要以教師自行撰寫的講義為教材，於學期初印製給每位學生，以便於學生依課程進度先進行課前預習與課後複習。另外，每單元學生需依		

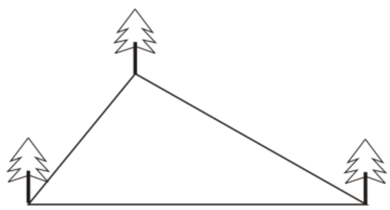
	照教師規劃之議題蒐集相關資料及閱讀。
參考書籍	➢ 項武義、張海潮、姚珩(2010)。千古之謎：幾何、天文與物理兩千年。台北：臺灣商務印書館。 ➢ 阮國全著。《星星的運動與四季星座》。台北市立天文科學教育館。 ➢ 《月亮代表我的心》科學人 2009/10 月號。 ➢ 《尋找地球刻度的人》時報出版社 2005。
作業設計	配合每單元教學內容規劃有習題，學生須於教師規定的期限內完成習題。 以「中國古代幾何」單元為例，習題如下： 1. 課後閱讀《重訪重差術》。 2. 中國古代可能認為太陽距地平面等高並且勻速在運動，請參閱《周髀》書中對二十四節氣竿影長度的紀錄。 3. “公尺”、”秒”是如何定義的?真空中的光速是多少?如何量光速? 4. 本節註二(請參閱講義)，討論祖沖之原理和應用。此一原理在西方由 F. Cavalieri(1598~1647)發現，他是伽利略(1564~1642)的學生。 5. 完成註五(請參閱講義)的論証。
成績評定方式	單元作業(50%)：學生須於規定時間內繳交每單元的習題作業。 課堂討論(20%)：配合每一單元之習題，參與課堂討論。 學期報告(30%)：期末繳交一份學期個人報告。
創意特殊規劃	本課程每單元的教學內容，由授課教師親自編撰講義及習題，學生配合上課內容及課後的習題安排，有系統的引導學生思考重要的數學內容和以簡馭繁的數學本質。 以「中國古代幾何」單元為例，自編講義請參閱附件。
課程網址	使用本校 ceiba 系統建置課程網頁。
其他補充資料	第一次上課講義及習題實例請見下方附件。

附件

一、國中學習回顧

在國一的數學課裏有下面這樣的問題：

有一個三角形的花圃，三邊長分別是 12 公尺、18 公尺、24 公尺。主人先在三角形的三個頂點各種了一棵樹，如圖：



如果要在三個邊上等距的種樹（例如每隔 2 公尺種一棵，或者每隔 3 公尺種一棵等等），但是又要求樹的棵數要最少，請問樹與樹的間距是幾公尺？

相信大多數的同學都可以很快的求出答案，但是我們是不是應該先問一個問題，那就是爲什麼答案，即樹與樹的間距，一定是整數倍的公尺 (例如 6 公尺)？誰規定這個問題不能是分數公尺呢？

請注意，這是一個一般性的問題。也就是說，如果我們的三角形花圃的三個邊長分別是 a, b, c 公尺，而 a, b, c 都是整數的時候，如果要在頂點和邊上等距種樹，那麼間距要怎麼取，樹的棵數可以最少？而這個間距一定是整數嗎？

同時期的國一數學，還有一個求 a, b, c 三個整數的最小公倍數的方法，方法如下：

$$\begin{array}{r|lll} d & a, & b, & c \\ \hline & a', & b', & c' \end{array}$$

先求 a,b,c 三者的最大公約數 d，除下來的商是 a',b',c'，三者當然不會再有公約數；然後任選兩個 a',b'，求 a',b' 最大公約數，但是保留 c' 不動：

$$\begin{array}{r|lll} d' & a', & b', & c' \\ \hline & a'', & b'', & c' \end{array}$$

然後再求 b'',c' 的最大公約數，a'' 不動，如此繼續，直到最下面一排的 3 個數，任意兩個數都沒有公約數的時候停止，最後把過程中所得的約數和最下排的 3 個數連乘起來，得到的積就是 a,b,c 的最小公倍數。舉一個實例：求 36、54、81 的最小公倍數，過程如下：

（一）36、54、81 的最大公約數是 9；

（二）4、6 的最大公約數是 2，9 保持不動；

（三）3、9 的最大公約數是 3，2 保持不動；

（四）2、1、3 中任兩數均無公約數停止。

$$\begin{array}{r|rrr} 9 & 36 & 54 & 81 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

則 $9\times2\times3\times2\times1\times3=324$ 就是 36、54、81 的最小公倍數。

這個方法多數的同學都學過，但是我們要問：

第一、 求 a,b,c 三個數的最小公倍數方法很多，爲什麼一定要用這個方法？例如，我們可以先求 a,b 的最小公倍數 e，然後再求 e 和 c 的最小公倍數。

第二、　還有別的方法嗎？

第三、　為什麼用這個方法得出的答案和用其他方法得出的答案是一樣的？

幾何一詞，英文是 geometry ，字首 geo 代表大地，metry 代表測量，合在一起，意思是測地之術。一般討論幾何之發端時，總會提到古埃及尼羅河每年 6 到 10 月定期氾濫（註一）。此時在河岸邊耕作的農民先往高處避難。等水退之後，再回到原地，接著政府就要重畫土地。重畫的時候需要丈量長度和方位（角），因此邊角關係就成為測量工作最主要的內容。同時，測量員還要能夠計算重畫土地的面積，畢竟每一位地主都希望自己擁有的土地只能多不能少。

如果田地是長方形，面積當然容易計算（註二）。但是經常為了因應地形而分到的土地可能是一個不規則的四邊形，這個時候，最基本的方法就是把土地分成兩塊三角形來計算面積。

問題是，即使是求三角形土地的面積，測量員可能也無法在土地上直接拉出一條高來應用 $\frac{1}{2}$底×高 這個公式。有時可能因為土地太大，或是就在高的這一段上有一大片濕地，而無法測出高的長度。

回顧國（高）中時學過的海龍（Heron）公式，公式說三邊長為 a, b, c 的三角形面積等於：

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

式中 s 代表三角形的半周長 $(a+b+c)/2$。這個公式告訴我們，完全不必進入三角形的內部，只要沿它的三個邊各測長度，就可以得到此三角形區域的面積（註三）。但實情是當時的測量員並無法使用這公式，因為他們不會開方。

據考證在公元前 2 世紀的一份愛德夫（Edfu）地契中（註四），當時對某些四邊形面積的求法是用

$$\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}$$

亦即把一四邊形的對邊加以平均，當成一個長方形來計算，實際上當時的測量員只能用比較粗略的近似公式來計算面積。因此海龍（Heron）在公元前?100 年左右就能得到如此精緻的公式簡直就是奇蹟。此外，海龍本人也是一個優秀的測繪人員，我們猜測他的地位應該是當年在埃及亞歷山大城的一位測量總工程師。

Morris Kline 在古今數學思想中譯本第 140 頁（註五）對於希臘幾何的精緻化有下面的評論：

“因爲天文是希臘數學所主要關心的事”

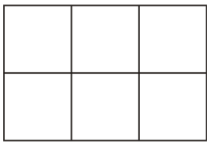
意思是說，因爲測天，才有發展從平面幾何到三角學到球面幾何和立體幾何的必要，如果只是爲了測地，純粹理論的幾何學不太可能發展。就這點來說，希臘幾何是數學史上最璀璨的一顆珍珠，應該當之無愧。

註一　古埃及人發現每年夏至的時候（6 月 22 日）日出前天狼星會出現在東方地平線，而尼羅河會在這個時節開始氾濫。

為什麼尼羅河氾濫與天狼星的出現有關？又，爲什麼每年的 6 月 22 日天狼星會出現在東方的地平線，偕日東升？

（歲差會使太陽在夏至時背景的恆星逐年改變）

註二　長方形的面積公式是長乘寬，在古希臘時期這個公式是透過假設長寬之比是整數比，例如長比寬是 3 比 2 而有下圖：



因此得到面積是長乘寬這個公式，但希臘的學者逐漸發現有的量與量之間非整數比，例如等腰直角三角形的邊長之比是 $\sqrt{2}:1:1$，因而重新尋求面積公式是長乘寬的合理性，這件事歷史上稱爲第一次數學危機。

但是對中國來說，長方形面積一定是長乘寬，從不懷疑。

三角形三內角和是 $180°$，面積公式，畢式定理，相似形成比例定理是幾何學四個基本的計算公式。

複習如何用面積公式證明畢氏定理。

複習如何用面積公式證明相似形成比例定理，中國爲什麼沒有第一次數學危機？

註三　如果三角形的面積可以用三邊長 a,b,c 的對稱式來表示，則這個公式有兩個可能的形式，一個是 a,b,c 的二次式，另一個是 a,b,c 的四次式開平方。另一方面，如果用 $c=a+b$ 代入，由於三角形的兩邊之和要大於第三邊，$c=a+b$ 是一個退化的三角形，代表一條線段，面積應該爲 0；所以無論面積公式如何表達，都必須被 $c-a-b$ 或 $a+b-c$ 整除。又從 a,b,c 對稱的角度看來，這個表示面積或面積平方的式子一定會被 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 整除，因此排除了二次式。如果選擇四次式來開平方，這個四次式已經有了 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 的因式，因此我們要問如何再補上一個對稱的一次式，再加上適當的係數來得到這個四次式？

註四　參考李文林數學史概論（九章出版社）21 頁

註五　Morris Kline《Mathematical Thought from Ancient to Modern

Times》中譯本 古今數學思想，上海科學技術出版社。

習題一（國中學習回顧）

1. 對一個四邊形用對邊的平均 $\frac{a+c}{2}$ 和 $\frac{b+d}{2}$ 的乘積來估計面積，誤差如何？
2. 本節註一中，古埃及在夏至日將出之前，天狼星會在東方地平線，由於「春分進動」，現在天狼星是否仍有這個「與日偕出」的現象？
3. 完成本節註三對海龍公式的討論。
4. 當朔之後，首先看見新月的時候，新月出現在哪個方位？滿月出現在哪個方位？新月出現時是東暗西亮（上弦），爲什麼？所謂「月落烏啼霜滿天」，大概是陰曆月的哪一天？

參考資料：阮國全著《星星的運動與四季星座》。

二、中國古代幾何

在討論中國的測量／幾何成就之前，先說明在古籍中出現的測量單位（註一）。

在古代經常用的單位是步，1 步相當 6 尺，1 尺是 10 寸，10 尺是 1 丈，10 丈是 1 引，1 里是 300 步，亦即 1 里是 1800 尺。至於 1 尺，在秦漢之際大約是 23 公分，因此一里大約是 414 公尺，現在大陸把 1 里定爲 1 公里之半，即 500 公尺。

其次，略說明中算在幾何上的成就，大致是（1）勾股（弦）定理，即畢氏定理；（2）計算多邊形的面積和特殊多面體（如錐）的體

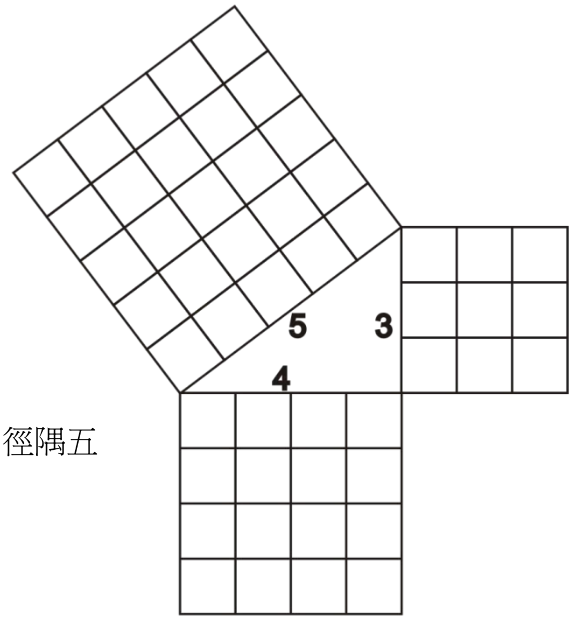
積;(3)圓面積和球體積;(4)海龍(Heron)/秦九韶公式(註二)。

中國人很早就發現了勾股(弦)定理，在《周髀》一書的首頁，藉由周公和大夫商高的對話，首次提到測量以及勾股定理在測量中的重要性，下面是周公與商高的對話(註三):

> 昔者周公問於商高曰：竊聞乎大夫善數也，請問古者包犧立周天曆度，夫天不可階而升，地不可得尺寸而度，請問數安從出？商高曰：數之法出於圓方；圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩，以為勾廣三，股修四，徑隅五。既方之外，半其一矩，環而共盤，得成三四五，兩矩共長二十有五是謂積矩。故禹之所以治天下者，此數之所生也。

這短短一百多字大抵上說明了數與形的密切關連，所謂「數之法出於圓方」。照理，就數的運算來說，諸如加減乘除等運算，本是自成體系，不假外求，但是《周髀》似乎一開始就把測量與數連在一起，所以周公才說「天不可階而升，地不可得尺寸而度」。

文中出現的「三四五」，指的是勾股弦的一個特例，亦即三邊長分別 3、4 和 5 的直角三角形。不難發現，3 的平方加上 4 的平方剛好是 5 的平方。事實上，所有國中生學習勾股弦定理，入門都是靠這個特例。商高說「勾廣三，股修四，徑隅五」:廣是短的意思，修是長的意思，而徑就是指這個直角三角形的斜邊。通常木匠用的曲尺，只由勾和股兩邊構成，斜邊的部分可說是由勾和股的兩端連出，算是拉出一條最長的線，所以曰徑；



勾股弦定理：
勾廣三，股修四，徑隅五

如果在牆角靠上一根棍子，就可以看到一個直角三角形，這根棍子就是徑，搭在牆角就是隅。至於「兩矩共長二十有五」這句話，25 指的正是 5 的平方，兩矩自然是指 9（3 的平方）和 16（4 的平方），亦即勾的平方和股的平方相加是弦的平方（9 加 16 等於 25）。

商高接著話鋒一轉，說「故禹之所以治天下者」，這句話看來突兀，其實不然。且說禹的時代，在殷商之前，青銅尚無，測量工具十分簡單，想要有一個現代木匠所持的曲尺，光材料就是個大問題。先民手持的矩，可能是用三根比例是 3、4、5 的棍子首尾相接，接成一個直角三角形，所以商高才說「故折矩，以爲勾廣三，股修四，徑隅五」。正是因爲直角的構成在測量工作中十分重要；量遠處的高要靠相似形的比例關係，築牆要確立鉛垂線和水平線，而丈量土地面積也要在地面上拉出直角，才能引用長乘寬等於面積的公式，讓劃分土地的業務順利進行。商高所謂的治天下，指的是管理天下，不單指治水而已（註四）。

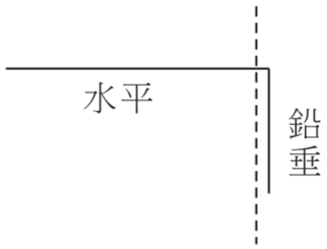
> 商高接著說：此方圓之法，萬物周事而圓方用焉，大所造制而規矩設焉，或毀方而為圓，或破圓而為方。方中為圓者謂之圓方，

圓中為方者謂之方圓也。

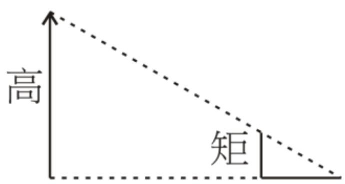
周公曰：大哉言數！請問用矩之道？

商高曰：平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠。

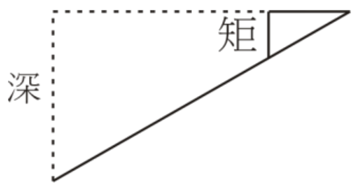
此處所謂平矩是指利用一條鉛垂線與矩之一邊重合而求水平之法，如圖：



偃矩是指利用相似三角形之邊長比求遠處之高，如圖（註五）



覆矩是將偃矩倒過來測深度。



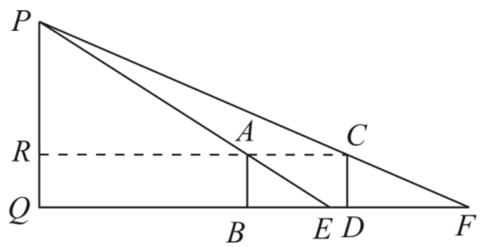
臥矩是指將矩擺在地上以測遠距。

注意到中國並沒有發展三角學來處理一般三角形的邊角關係，例如正弦定律和餘弦定律。中國人從頭到尾用直角三角形，並且在這個基礎下發展了所謂的「重差術」，是中國測量術的最高成就。

重差術

重差術出於劉徽原置於《九章算術》內有關勾股如何用於測量的專章，在唐初選定算經十書時，才由九章分出，單成一部《海島算經》，重差術的方法可由下例來說明（註六）：

> 今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地，取望島峰，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地，取望島峰，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？答曰：島高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。術曰：以表高乘表間為實，相多為法除之，所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者，以前表卻行乘表間為實，相多為法除之，得島去表數。



如圖，E, F是人目，$\overline{CD}=\overline{AB}=h=3$丈$=5$步是表高，$\overline{BD}=d=1000$步是兩表間距，$\overline{BE}=123$步，$\overline{DF}=127$步，$\overline{PQ}=y$是島峰之高，$\overline{QB}=x$是前表到海島$Q$的距離。相關的方程式如下：

$$\frac{y}{x+123}=\frac{h}{123}\cdots(1)$$

$$\frac{y}{x+1000+127}=\frac{h}{127}\cdots(2)$$

由（1），$123y=hx+123h$

由（2），$127y=hx+h(1000+127)$

兩式相減，解得

$$y=\frac{h(1000+127-123)}{127-123}$$
$$=\frac{h\times 1000}{127-123}+h$$

$(2)/(1)$ 得

$$\frac{x+123}{x+1000+127}=\frac{123}{127}$$
$$127x+127\times 123=123\times x+123\times 1000+123\times 127$$
$$x=\frac{123\times 1000}{(127-123)}$$

原文中的「術曰」，是用來說明如何得到 y 和 x，所謂「實」指分子，「法」指分母，相多是指 $\overline{DF}=127$ 和 $\overline{BE}=123$ 之差。具體算出 $y=\frac{5000}{4}+5=1255$步$=4$里55步（1 里等於 300 步），此即劉徽給出的答案。

初唐李淳風對周髀的注中另有下例：

> 夏至王城望日，立兩表相去 2000 里，表高 8 尺。影去前表 1 尺 5 寸，去後表 1 尺 7 寸。舊術以前後影差 2 寸為法，以前影寸數乘表間為實，實如法，得萬五千里，為日下去南表里。以表高 80 寸乘表間為實，實如法得 8 萬里，為表上去日里。

根據李淳風，計算日下去南表里如下：

前影寸數 15寸

表間 2000里

$$15寸\times 2000里/2寸=7.5\times 2000里=15000$$

再計算表上去日里如下：

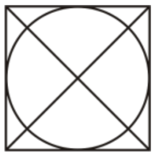
$$\frac{80寸\times 2000里}{2寸}=80000里$$

與前例比較，不加 80 寸，原因是 80 寸比起 80000 里微不足道。

從李淳風的的例子，我們看到古代中國對太陽有多高，和太陽究竟在南方哪個位置很有興趣，重差術似乎是爲了測日而發展出來的（註七）。

註一　現今的長度單位公尺是怎麼定義的？光速是 299,792,458 公尺／秒，秒是怎麼定義的？

註二　關於體積公式的獲得，祖沖之（429~500）原理是關鍵，如下圖所示：



繞對稱軸旋轉，可以據而求得球的體積公式。

至於海龍公式，宋秦九韶（1202~1261）也發現，但無證明。海龍本人的證明見《數學歷史典故》(作者梁宗巨，九章出版社）111 頁。

中算的幾何成就可參考《中國古代數學簡史》作者李儼、杜石然，九章出版社。

祖沖之原理是指任何兩個立體，以任意水平面同時裁割，若裁割出的面積彼此相等,則兩立體的體積也相等(冪勢既同，則積不容異)。

註三　唐初太史令李淳風（602~670）奉敕編纂算經十書作爲國子監（即太學）算學館教材以及科舉明算科考試科目。《周髀》爲十書之首，是中國最古老的算書，大約成書於秦漢之際，現存的版本由魏晉時人趙君卿注釋。

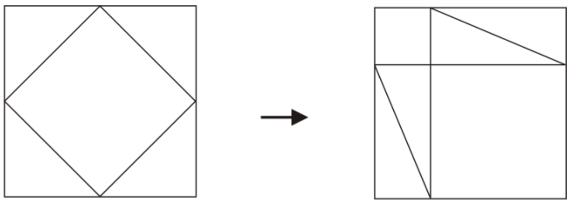
註四　在 2002 年出版的百科全書（The World Book Encyclopedia）有

關畢氏定理的這一條目中，特別提到古埃及的測量員把一圈繩子打上 12 個結後等分成 12 段。在土地丈量要畫直角的時候，利用 3 根樁，將繩子套上，調整樁間的距離，分別是 3 等分段、4 等分段、和 5 等分段，然後將繩子繃緊，由於這圈繩子剛好是 12 等分段（12 是 3、4、5 之和），所以這三根樁可以把繩子繃成一個直角三角形，和商高所說「折矩，以爲勾廣三，股修四，徑隅五」的現象完全一致。

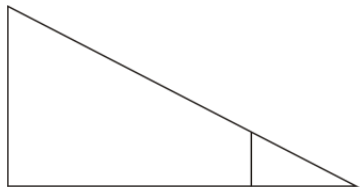
古埃及人的智慧

梁宗巨先生在《數學歷史典故》一書的 255 頁也提到了古埃及的測量員，並在書中轉載一幅公元前 1415 年的墓畫。根據考證，墓畫中測量員正式的稱呼是拉繩者(rope stretchers)，畫中顯示了測量員提著繩子上工的情形。對照前面百科全書的解釋，拉繩者應該是利用繩子圍成直角三角形，以進行土地丈量的工作。

註五　下面這個大正方形含小正方形的圖是古代中國證明勾股定理的方法，見於一般國中數學課本，所以勾股定理又稱商高定理。



下面這個大直角三角形含小直角三角形的圖，從大、小直角三角形和梯形面積的關係可以得到大小直角三角形的勾股成比例。（傳統上稱直立的部分是股，水平的部分是勾）



註六　九章算術約成書於西漢，由三國時人劉徽所注，此處的例子引自海島算經第一問。

註七　不過，古人對太陽的測量一開始的幾何模型就錯了。